

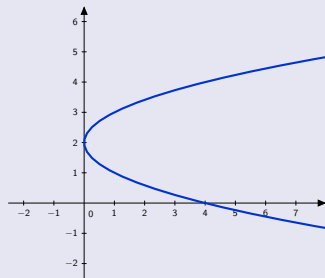
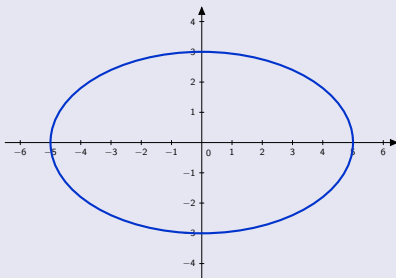
Onderzoek van Onderwijs

Rijkere cognitieve eenheden door het benadrukken van synthetische meetkunde tijdens de behandeling van analytische meetkunde

Mark Timmer
30 augustus 2011

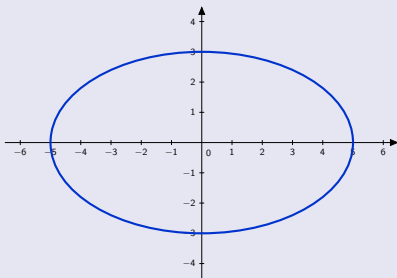
Analytische meetkunde

Vergelijkingen voor meetkundige figuren

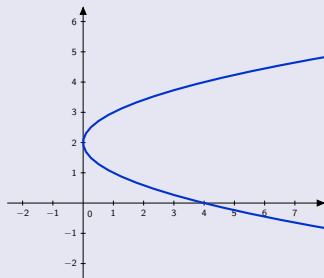


Analytische meetkunde

Vergelijkingen voor meetkundige figuren



$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$



$$(y - 2)^2 = 4x$$

Slim nadenken bespaart tijd

Welke horizontale symmetrielijns heeft $(y - 2)^2 = 4x$?

Slim nadenken bespaart tijd

Welke horizontale symmetrielijns heeft $(y - 2)^2 = 4x$?

Uitwerking 1

Haakjes wegwerken:

$$(y - 2)^2 = 4x$$

$$y^2 - 4y - 4x + 4 = 0$$

Slim nadenken bespaart tijd

Welke horizontale symmetrielijns heeft $(y - 2)^2 = 4x$?

Uitwerking 1

Haakjes wegwerken:

$$(y - 2)^2 = 4x$$
$$y^2 - 4y - 4x + 4 = 0$$

Als $y = a$ een symmetrielijns is, dan ligt $(x, a + b)$ op de figuur dan en slechts dan als $(x, a - b)$ erop ligt.

Slim nadenken bespaart tijd

Welke horizontale symmetrielijns heeft $(y - 2)^2 = 4x$?

Uitwerking 1

Haakjes wegwerken:

$$(y - 2)^2 = 4x$$
$$y^2 - 4y - 4x + 4 = 0$$

Als $y = a$ een symmetrielijns is, dan ligt $(x, a + b)$ op de figuur dan en slechts dan als $(x, a - b)$ erop ligt.

$$(a + b)^2 - 4(a + b) - 4x + 4 = 0$$

$$(a - b)^2 - 4(a - b) - 4x + 4 = 0$$

Slim nadenken bespaart tijd

Welke horizontale symmetrielijns heeft $(y - 2)^2 = 4x$?

Uitwerking 1

Haakjes wegwerken:

$$(y - 2)^2 = 4x$$
$$y^2 - 4y - 4x + 4 = 0$$

Als $y = a$ een symmetrielijns is, dan ligt $(x, a + b)$ op de figuur dan en slechts dan als $(x, a - b)$ erop ligt.

$$(a + b)^2 - 4(a + b) - 4x + 4 = 0 \qquad (a - b)^2 - 4(a - b) - 4x + 4 = 0$$
$$a^2 + 2ab + b^2 - 4a - 4b - 4x + 4 = 0 \qquad a^2 - 2ab + b^2 - 4a + 4b - 4x + 4 = 0$$

Slim nadenken bespaart tijd

Welke horizontale symmetrielijns heeft $(y - 2)^2 = 4x$?

Uitwerking 1

Haakjes wegwerken:

$$(y - 2)^2 = 4x$$

$$y^2 - 4y - 4x + 4 = 0$$

Als $y = a$ een symmetrielijns is, dan ligt $(x, a + b)$ op de figuur dan en slechts dan als $(x, a - b)$ erop ligt.

$$(a + b)^2 - 4(a + b) - 4x + 4 = 0 \qquad (a - b)^2 - 4(a - b) - 4x + 4 = 0$$

$$a^2 + 2ab + b^2 - 4a - 4b - 4x + 4 = 0 \qquad a^2 - 2ab + b^2 - 4a + 4b - 4x + 4 = 0$$

Slim nadenken bespaart tijd

Welke horizontale symmetrielijns heeft $(y - 2)^2 = 4x$?

Uitwerking 1

Haakjes wegwerken:

$$(y - 2)^2 = 4x$$

$$y^2 - 4y - 4x + 4 = 0$$

Als $y = a$ een symmetrielijns is, dan ligt $(x, a + b)$ op de figuur dan en slechts dan als $(x, a - b)$ erop ligt.

$$(a + b)^2 - 4(a + b) - 4x + 4 = 0 \qquad (a - b)^2 - 4(a - b) - 4x + 4 = 0$$

$$a^2 + 2ab + b^2 - 4a - 4b - 4x + 4 = 0 \qquad a^2 - 2ab + b^2 - 4a + 4b - 4x + 4 = 0$$

$$2ab - 4b = -2ab + 4b$$

Slim nadenken bespaart tijd

Welke horizontale symmetrielijns heeft $(y - 2)^2 = 4x$?

Uitwerking 1

Haakjes wegwerken:

$$(y - 2)^2 = 4x$$

$$y^2 - 4y - 4x + 4 = 0$$

Als $y = a$ een symmetrielijns is, dan ligt $(x, a + b)$ op de figuur dan en slechts dan als $(x, a - b)$ erop ligt.

$$(a + b)^2 - 4(a + b) - 4x + 4 = 0 \qquad (a - b)^2 - 4(a - b) - 4x + 4 = 0$$

$$a^2 + 2ab + b^2 - 4a - 4b - 4x + 4 = 0 \qquad a^2 - 2ab + b^2 - 4a + 4b - 4x + 4 = 0$$

$$2ab - 4b = -2ab + 4b$$

$$2a - 4 = -2a + 4$$

Slim nadenken bespaart tijd

Welke horizontale symmetrielijns heeft $(y - 2)^2 = 4x$?

Uitwerking 1

Haakjes wegwerken:

$$(y - 2)^2 = 4x$$

$$y^2 - 4y - 4x + 4 = 0$$

Als $y = a$ een symmetrielijns is, dan ligt $(x, a + b)$ op de figuur dan en slechts dan als $(x, a - b)$ erop ligt.

$$(a + b)^2 - 4(a + b) - 4x + 4 = 0 \qquad (a - b)^2 - 4(a - b) - 4x + 4 = 0$$

$$a^2 + 2ab + b^2 - 4a - 4b - 4x + 4 = 0 \qquad a^2 - 2ab + b^2 - 4a + 4b - 4x + 4 = 0$$

$$2ab - 4b = -2ab + 4b$$

$$2a - 4 = -2a + 4$$

$$4a = 8$$

Slim nadenken bespaart tijd

Welke horizontale symmetrielijns heeft $(y - 2)^2 = 4x$?

Uitwerking 1

Haakjes wegwerken:

$$(y - 2)^2 = 4x$$

$$y^2 - 4y - 4x + 4 = 0$$

Als $y = a$ een symmetrielijns is, dan ligt $(x, a + b)$ op de figuur dan en slechts dan als $(x, a - b)$ erop ligt.

$$(a + b)^2 - 4(a + b) - 4x + 4 = 0 \qquad (a - b)^2 - 4(a - b) - 4x + 4 = 0$$

$$a^2 + 2ab + b^2 - 4a - 4b - 4x + 4 = 0 \qquad a^2 - 2ab + b^2 - 4a + 4b - 4x + 4 = 0$$

$$2ab - 4b = -2ab + 4b$$

$$2a - 4 = -2a + 4$$

$$4a = 8$$

$$a = 2$$

Slim nadenken bespaart tijd

Welke horizontale symmetrielijns heeft $(y - 2)^2 = 4x$?

Slim nadenken bespaart tijd

Welke horizontale symmetrielijns heeft $(y - 2)^2 = 4x$?

Uitwerking 2

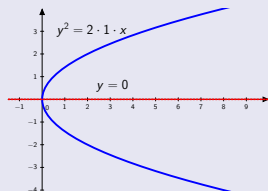
- De standaardvergelijking van een liggende parabool is $y^2 = 2px$.

Slim nadenken bespaart tijd

Welke horizontale symmetrielijns heeft $(y - 2)^2 = 4x$?

Uitwerking 2

- De standaardvergelijking van een liggende parabool is $y^2 = 2px$.
- Zo'n parabool gaat precies door de oorsprong, en heeft zijn as ($y = 0$) als symmetrielijns.

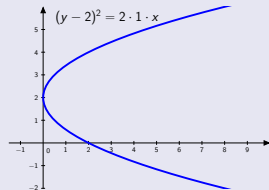
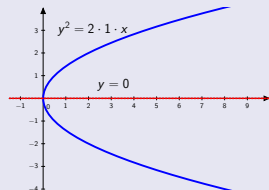


Slim nadenken bespaart tijd

Welke horizontale symmetrielijns heeft $(y - 2)^2 = 4x$?

Uitwerking 2

- De standaardvergelijking van een liggende parabool is $y^2 = 2px$.
- Zo'n parabool gaat precies door de oorsprong, en heeft zijn as ($y = 0$) als symmetrielijns.
- De gegeven vergelijking is ook van deze vorm, alleen is hij 2 omhoog verschoven.

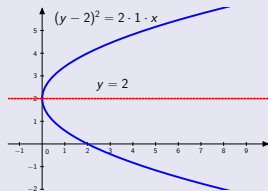
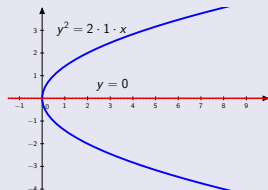


Slim nadenken bespaart tijd

Welke horizontale symmetrielijns heeft $(y - 2)^2 = 4x$?

Uitwerking 2

- De standaardvergelijking van een liggende parabool is $y^2 = 2px$.
- Zo'n parabool gaat precies door de oorsprong, en heeft zijn as ($y = 0$) als symmetrielijns.
- De gegeven vergelijking is ook van deze vorm, alleen is hij 2 omhoog verschoven.
- De symmetrielijns is dus gegeven door $y = 2$.



Onderzoeksvraag

“Leidt het benadrukken van onderliggende concepten uit de synthetische meetkunde, eventueel gevisualiseerd door middel van GeoGebra, in Hoofdstuk 14 van Getal & Ruimte VWO D4 (Analytische meetkunde – Krommen) tot rijkere cognitieve eenheden?”

Onderzoeksvraag

*“Leidt het benadrukken van **onderliggende concepten uit de synthetische meetkunde**, eventueel gevisualiseerd door middel van GeoGebra, in Hoofdstuk 14 van Getal & Ruimte VWO D4 (Analytische meetkunde – Krommen) tot rijkere cognitieve eenheden?”*

Synthetische meetkunde:

- Parabolen
- Cirkels
- Ellipsen
- Hyperbolen

Onderzoeksvraag

*“Leidt het benadrukken van onderliggende concepten uit de synthetische meetkunde, eventueel **gevisualiseerd door middel van GeoGebra**, in Hoofdstuk 14 van Getal & Ruimte VWO D4 (Analytische meetkunde – Krommen) tot rijkere cognitieve eenheden?”*

Synthetische meetkunde:

- Parabolen
- Cirkels
- Ellipsen
- Hyperbolen



Onderzoeksvraag

“Leidt het benadrukken van onderliggende concepten uit de synthetische meetkunde, eventueel gevisualiseerd door middel van GeoGebra, in Hoofdstuk 14 van Getal & Ruimte VWO D4 ([Analytische meetkunde](#) – Krommen) tot rijkere cognitieve eenheden?”

Synthetische meetkunde:

- Parabolen
- Cirkels
- Ellipsen
- Hyperbolen



Onderzoeksvraag

*“Leidt het benadrukken van onderliggende concepten uit de synthetische meetkunde, eventueel gevisualiseerd door middel van GeoGebra, in Hoofdstuk 14 van Getal & Ruimte VWO D4 (Analytische meetkunde – Krommen) tot **rijkere cognitieve eenheden**?”*

Synthetische meetkunde:

- Parabolen
- Cirkels
- Ellipsen
- Hyperbolen



Cognitieve eenheden

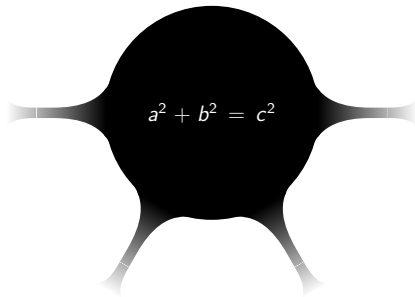
*“Een **cognitieve eenheid** bestaat uit een cognitief item waar een individu zijn aandacht op kan focussen, samen met andere ideeën die daar direct aan verbonden zijn.”*

Cognitieve eenheden

*“Een **cognitieve eenheid** bestaat uit een **cognitief item** waar een individu zijn **aandacht op kan focussen**, samen met andere ideeën die daar direct aan verbonden zijn.”*

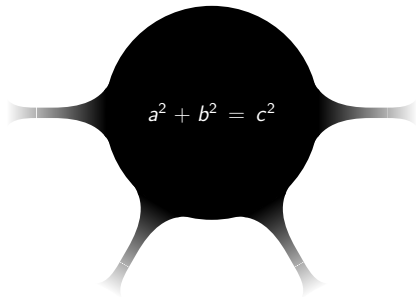
Cognitieve eenheden

*“Een **cognitieve eenheid** bestaat uit een **cognitief item** waar een individu zijn **aandacht op kan focussen**, samen met andere ideeën die daar direct aan verbonden zijn.”*



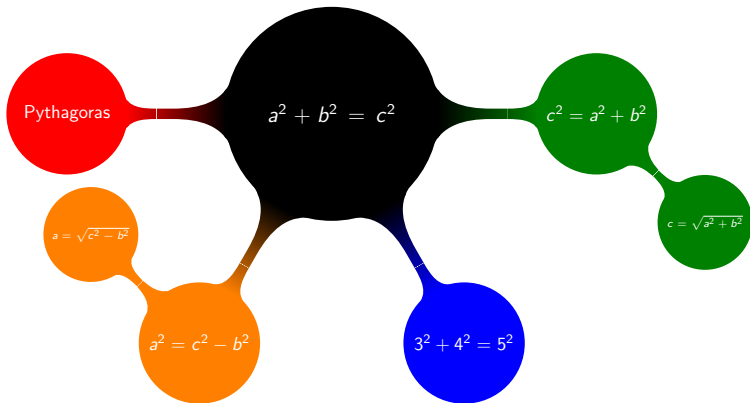
Cognitieve eenheden

“Een *cognitieve eenheid* bestaat uit een *cognitief item* waar een individu zijn *aandacht op kan focussen*, samen met *andere ideeën* die daar *direct aan verbonden* zijn.”



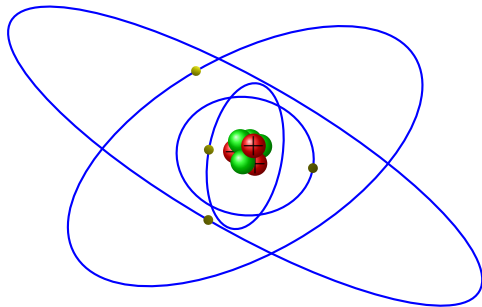
Cognitieve eenheden

“Een *cognitieve eenheid* bestaat uit een *cognitief item* waar een individu zijn *aandacht op kan focussen*, samen met *andere ideeën* die daar *direct aan verbonden* zijn.”



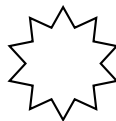
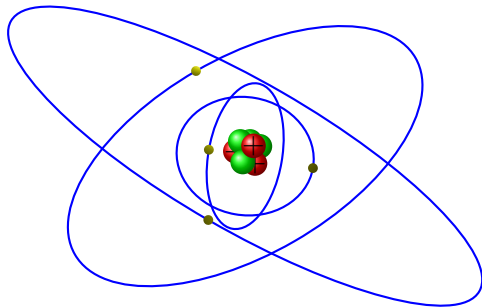
Rijke cognitieve eenheden

Mentale samenpersing:



Rijke cognitieve eenheden

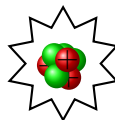
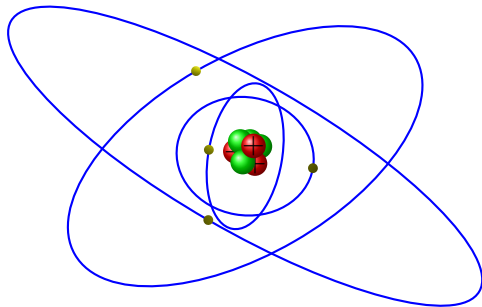
Mentale samenpersing:



Cognitieve eenheid

Rijke cognitieve eenheden

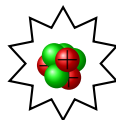
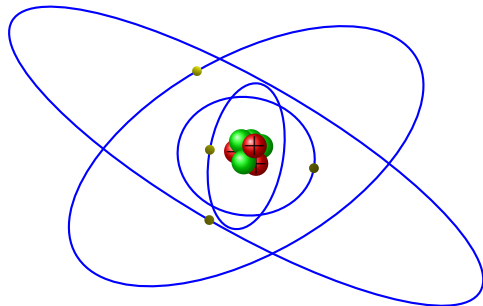
Mentale samenpersing:



Cognitieve eenheid

Rijke cognitieve eenheden

Mentale samenpersing:

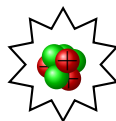
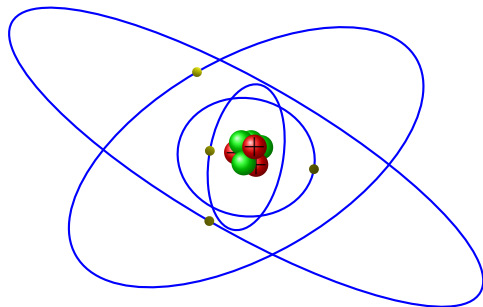


Cognitieve eenheid

- Samenpersen van kennis tot **kleine** cognitieve items

Rijke cognitieve eenheden

Mentale samenpersing:

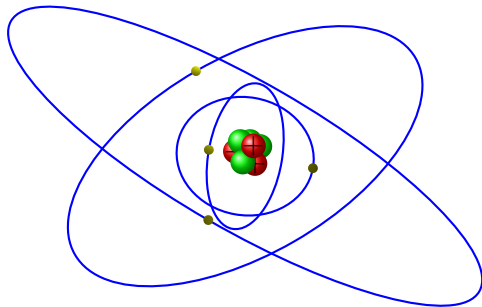


Cognitieve eenheid

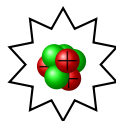
- Samenpersen van kennis tot **kleine cognitieve items**
- **Koppelen** van verschillende cognitieve items tot **sterkverbonden cognitieve eenheden**

Rijke cognitieve eenheden

Mentale samenpersing:



- Samenpersen van kennis tot **kleine cognitieve items**
- **Koppelen** van verschillende cognitieve items tot **sterkverbonden cognitieve eenheden**



Cognitieve eenheid

Totstandbrenging:

- Categorisatie
- Naamgeving
- Abstractie
- Langetermijnpotentiatie

Visualisatie door middel van GeoGebra

Demo

Visualisatie door middel van GeoGebra

Mogelijke sterke punten van visualisatie / meetkundesoftware:

- Conceptueel begrip vergroten
- Relaties tussen concepten ontdekken (*dragging*)
- Betere beeldvorming van abstracte concepten
- Motiverend

Visualisatie door middel van GeoGebra

Mogelijke sterke punten van visualisatie / meetkundesoftware:

- **Conceptueel begrip** vergroten
- **Relaties** tussen concepten ontdekken (*dragging*)
- Betere **beeldvorming** van abstracte concepten
- **Motiverend**

Valkuilen:

- **Redeneervaardigheden** worden niet altijd bevorderd
- **Interpretatie** van getoonde visualisaties niet altijd eenvoudig
- **Te vroeg** met mooie plaatjes komen
- Werkt slechts als **aanvulling** op niet-technologische bronnen

Visualisatie door middel van GeoGebra

Mogelijke sterke punten van visualisatie / meetkundesoftware:

- Conceptueel begrip vergroten
- Relaties tussen concepten ontdekken (*dragging*)
- Betere beeldvorming van abstracte concepten
- Motiverend

Valkuilen:

- Redeneervaardigheden worden niet altijd bevorderd
- Interpretatie van getoonde visualisaties niet altijd eenvoudig
- Te vroeg met mooie plaatjes komen
- Werkt slechts als aanvulling op niet-technologische bronnen

In dit onderzoek:

- Visualisatie van reeds bekende concepten (incl. *dragging*)
- Niet slechts plaatjes kijken; uitleg bij de beelden
- Veelvuldig vergezeld door extra opgaven

De onderzoeksopzet

Deelnemers:

- Stedelijk Lyceum Kottenpark, Enschede
- VWO 5 – Wiskunde D (Henri Ruizenaar)
- Vier leerlingen



De onderzoeksopzet

Deelnemers:

- Stedelijk Lyceum Kottenpark, Enschede
- VWO 5 – Wiskunde D (Henri Ruizenaar)
- Vier leerlingen



Kwalitatief onderzoek: veel inzicht krijgen in een kleine populatie

De onderzoeksopzet

Deelnemers:

- Stedelijk Lyceum Kottenpark, Enschede
- VWO 5 – Wiskunde D (Henri Ruizenaar)
- Vier leerlingen



Kwalitatief onderzoek: veel inzicht krijgen in een kleine populatie

- 1 Pretest (interviews)
- 2 Twaalf lessen
- 3 Posttest (interviews)

Pretest

Opgave 1. Waar denk je aan bij een ellips? Noem zoveel mogelijk in één minuut.

Opgave 2. Gegeven is de ellips $e: \frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{18} = 1$.

- (a) Laat zien dat het punt $P(4, 3)$ op de ellips ligt.
- (b) Ligt het punt $P(-4, 3)$ op de ellips? Waarom?

Opgave 3. Het punt P doorloopt de ellips $e: \frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$. Gegeven is ook het punt $A(-5, -3)$. Welke kromme beschrijft een punt Q als het zich op het midden van het lijnstuk AP bevindt terwijl P over de ellips loopt?

Opgave 4. Gegeven een ellips $e: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

- (a) Geef de coördinaten van de brandpunten F_1, F_2 .
- (b) Gegeven is nu een cirkel c met straal 10 en als middelpunt M het brandpunt van e links van de y -as. Wat is de afstand tussen de cirkel en het punt $P(0, 4)$?

Pretest

Opgave 1. Waar denk je aan bij een ellips? Noem zoveel mogelijk in één minuut.

Opgave 2. Gegeven is de ellips $e: \frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{18} = 1$.

- (a) Laat zien dat het punt $P(4, 3)$ op de ellips ligt.
- (b) Ligt het punt $P(-4, 3)$ op de ellips? Waarom?

Opgave 3. Het punt P doorloopt de ellips $e: \frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$. Gegeven is ook het punt $A(-5, -3)$. Welke kromme beschrijft een punt Q als het zich op het midden van het lijnstuk AP bevindt terwijl P over de ellips loopt?

Opgave 4. Gegeven een ellips $e: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

- (a) Geef de coördinaten van de brandpunten F_1, F_2 .
- (b) Gegeven is nu een cirkel c met straal 10 en als middelpunt M het brandpunt van e links van de y -as. Wat is de afstand tussen de cirkel en het punt $P(0, 4)$?

Pretest

Opgave 1. Waar denk je aan bij een ellips? Noem zoveel mogelijk in één minuut.

Opgave 2. Gegeven is de ellips $e: \frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{18} = 1$.

- (a) Laat zien dat het punt $P(4, 3)$ op de ellips ligt.
- (b) **Ligt het punt $P(-4, 3)$ op de ellips? Waarom?**

Opgave 3. Het punt P doorloopt de ellips $e: \frac{(x-5)^2}{16} + \frac{(y-3)^2}{9} = 1$. Gegeven is ook het punt $A(-5, -3)$. Welke kromme beschrijft een punt Q als het zich op het midden van het lijnstuk AP bevindt terwijl P over de ellips loopt?

Opgave 4. Gegeven een ellips $e: \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{16} = 1$.

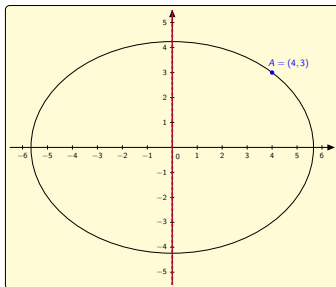
- (a) Geef de coördinaten van de brandpunten F_1, F_2 .
- (b) Gegeven is nu een cirkel c met straal 10 en als middelpunt M het brandpunt van e links van de y -as. Wat is de afstand tussen de cirkel en het punt $P(0, 4)$?

Pretest

Opgave 1. Waar denk je aan bij een ellips? Noem zoveel mogelijk in één minuut.

Opgave 2. Gegeven is de ellips $e: \frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{18} = 1$.

- (a) Laat zien dat het punt $P(4, 3)$ op de ellips ligt.
- (b) Ligt het punt $P(-4, 3)$ op de ellips? Waarom?

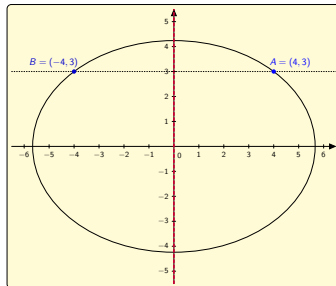
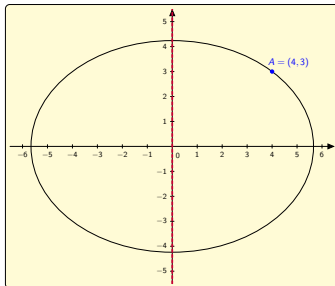


Pretest

Opgave 1. Waar denk je aan bij een ellips? Noem zoveel mogelijk in één minuut.

Opgave 2. Gegeven is de ellips $e: \frac{x^2}{32} + \frac{y^2}{18} = 1$.

- (a) Laat zien dat het punt $P(4, 3)$ op de ellips ligt.
- (b) Ligt het punt $P(-4, 3)$ op de ellips? Waarom?



Posttest

Opgave 1. Waar denk je aan bij een ellips? Noem zoveel mogelijk in één minuut.

Opgave 2. Gegeven is de familie van ellipsen $e_k: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{k} = 1$, met $k > 0$.

- (a) Het punt $P(x_P, 0)$ ligt op ieder van deze ellipsen. Welke waarden kan x_P hebben?
- (b) Voor precies één waarde van k geldt dat het punt $Q(3, 5)$ op de ellips e_k ligt. Op deze ellips e_k ligt ook het punt $R(-3, y_R)$. Welke waarden kan y_R hebben?

Opgave 3. Beschouw de ellips $e: \frac{(x+5)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$ en het punt $A(6, 0)$. Geef een vergelijking voor een raaklijn aan e door A .

Opgave 4. Gegeven is de ellips e die bestaat uit alle punten op gelijke afstand tot een cirkel $c: (x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 25$ en een punt $P(8, 2)$.

- (a) Geef de vergelijking van de ellips.
- (b) Beschouw de driehoek $\triangle MPA$, waarbij M het middelpunt van de cirkel en A het bovenste punt van de twee punten op de ellips met x -coördinaat 5 is. Hoe groot is de omtrek van deze driehoek?

Posttest

Opgave 1. Waar denk je aan bij een ellips? Noem zoveel mogelijk in één minuut.

Opgave 2. Gegeven is de familie van ellipsen $e_k: \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{k} = 1$, met $k > 0$.

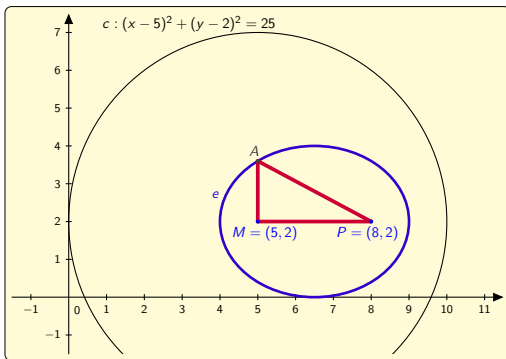
- (a) Het punt $P(x_P, 0)$ ligt op ieder van deze ellipsen. Welke waarden kan x_P hebben?
- (b) Voor precies één waarde van k geldt dat het punt $Q(3, 5)$ op de ellips e_k ligt. Op deze ellips e_k ligt ook het punt $R(-3, y_R)$. Welke waarden kan y_R hebben?

Opgave 3. Beschouw de ellips $e: \frac{(x+5)^2}{16} + \frac{(y+3)^2}{9} = 1$ en het punt $A(6, 0)$. Geef een vergelijking voor een raaklijn aan e door A .

Opgave 4. Gegeven is de ellips e die bestaat uit alle punten op gelijke afstand tot een cirkel $c: (x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 25$ en een punt $P(8, 2)$.

- (a) Geef de vergelijking van de ellips.
- (b) Beschouw de driehoek $\triangle MPA$, waarbij M het middelpunt van de cirkel en A het bovenste punt van de twee punten op de ellips met x -coördinaat 5 is. Hoe groot is de omtrek van deze driehoek?

Posttest



Opgave 4. Gegeven is de ellips e die bestaat uit alle punten op gelijke afstand tot een cirkel $c: (x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 25$ en een punt $P(8, 2)$.

- Geef de vergelijking van de ellips.
- Beschouw de driehoek $\triangle MPA$, waarbij M het middelpunt van de cirkel en A het bovenste punt van de twee punten op de ellips met x -coördinaat 5 is. Hoe groot is de omtrek van deze driehoek?

De lessen

Symmetrie

- Constructie ellips met behulp van GeoGebra
- Eigenschap van gelijke somafstand toegelicht
- Standaardvergelijking ellips in verband gebracht met figuur
- Constructie parabool met behulp van GeoGebra
- Standaardvergelijking parabool afgeleid
- Standaardvergelijking hyperbool in verband gebracht met figuur
- Extra opgave over ellipsen symmetrisch in $y = x$
- Extra opgave over symmetrie van analytisch gegeven krommen
- Visualisatie over translatie van ellipsen

De lessen

Symmetrie

- Constructie ellips met behulp van GeoGebra
- Eigenschap van gelijke somafstand toegelicht
- Standaardvergelijking ellips in verband gebracht met figuur
- Constructie parabool met behulp van GeoGebra
- Standaardvergelijking parabool afgeleid
- Standaardvergelijking hyperbool in verband gebracht met figuur
- Extra opgave over ellipsen symmetrisch in $y = x$
- Extra opgave over symmetrie van analytisch gegeven krommen
- Visualisatie over translatie van ellipsen

De lessen

Parametervoorstellingen

- Visualisatie van een [cirkel met een poollijn](#)
- Extra opgave over [raaklijnen na een translatie](#)
- Visualisatie van raaklijnen na een translatie
- Visualisatie van [verkleiningen van cirkels](#)
- Extra opgave over verkleiningen van cirkels
- Extra opgave over [geparametriseerde ellipsen](#)

De lessen

Parametervoorstellingen

- Visualisatie van een cirkel met een poollijn
- Extra opgave over raaklijnen na een translatie
- Visualisatie van raaklijnen na een translatie
- Visualisatie van verkleiningen van cirkels
- Extra opgave over verkleiningen van cirkels
- Extra opgave over geparаметriseerde ellipsen

Resultaten: leerling 1

Pretest:

- Geen meetkundige definities genoemd, precieze vergelijking onbekend
- Geen symmetrie of meetkundige bewijstechnieken gebruikt
- Richtcirkel niet herkend

Resultaten: leerling 1

Pretest:

- Geen meetkundige definities genoemd, precieze vergelijking onbekend
- Geen symmetrie of meetkundige bewijstechnieken gebruikt
- Richtcirkel niet herkend

Posttest:

- Enige associaties met meetkundige definities (brandpunten genoemd)
- Geen koppeling formule aan positie in het assenstelsel
- Geen gebruik van symmetrie of meetkundige bewijstechnieken gemaakt
- Constante somafstand niet gebruikt

Resultaten: leerling 1

Pretest:

- Geen meetkundige definities genoemd, precieze vergelijking onbekend
- Geen symmetrie of meetkundige bewijstechnieken gebruikt
- Richtcirkel niet herkend

Posttest:

- Enige associaties met meetkundige definities (brandpunten genoemd)
- Geen koppeling formule aan positie in het assenstelsel
- Geen gebruik van symmetrie of meetkundige bewijstechnieken gemaakt
- Constante somafstand niet gebruikt

Vergelijking:

- Zowel tijdens pre- als posttest **weinig kennis en inzicht**
- Snel **teruggrijpen naar rekenwerk**, ook nog tijdens de posttest
- **Geen verrijking** van cognitieve eenheden waargenomen

Resultaten: leerling 2

Pretest:

- Geen meetkundige definities genoemd, precieze vergelijking onbekend
- Gebruikgemaakt van symmetrie
- Geen meetkundige bewijstechnieken gebruikt
- Richtcirkel niet herkend

Resultaten: leerling 2

Pretest:

- Geen meetkundige definities genoemd, precieze vergelijking onbekend
- Gebruikgemaakt van symmetrie
- Geen meetkundige bewijstechnieken gebruikt
- Richtcirkel niet herkend

Posttest:

- Beide meetkundige definities en de correcte vergelijking genoemd
- Associatie met toppen, raaklijnen, poollijnen en translaties
- Koppeling formule aan ligging in assenstelsel
- Gebruikgemaakt van symmetrie and meetkundige bewijstechnieken
- Constante somafstand slim gebruikt

Resultaten: leerling 2

Pretest:

- Geen meetkundige definities genoemd, precieze vergelijking onbekend
- Gebruikgemaakt van symmetrie
- Geen meetkundige bewijstechnieken gebruikt
- Richtcirkel niet herkend

Posttest:

- Beide meetkundige definities en de correcte vergelijking genoemd
- Associatie met toppen, raaklijnen, poollijnen en translaties
- Koppeling formule aan ligging in assenstelsel
- Gebruikgemaakt van symmetrie and meetkundige bewijstechnieken
- Constante somafstand slim gebruikt

Vergelijking:

- Enorme vooruitgang in associaties bij ellipsen
- Gebruikgemaakt van verschillende representaties
- Nadenken voordat er gerekend wordt
- Aanzienlijke verrijking van cognitieve eenheden

Resultaten: leerling 3

Pretest:

- Geen meetkundige definities genoemd, precieze vergelijking onbekend
- **Associatie met symmetrie, brandpunten en kegelsneden**
- Gebruikgemaakt van symmetrie
- Geen meetkundige bewijstechnieken gebruikt
- Richtcirkel niet herkend

Resultaten: leerling 3

Pretest:

- Geen meetkundige definities genoemd, precieze vergelijking onbekend
- **Associatie met symmetrie, brandpunten en kegelsneden**
- Gebruikgemaakt van symmetrie
- Geen meetkundige bewijstechnieken gebruikt
- Richtcirkel niet herkend

Posttest:

- Eén meetkundige definitie en de correcte vergelijking genoemd
- Koppeling formule aan ligging in assenstelsel
- Gebruikgemaakt van symmetrie
- Geen meetkundige bewijstechnieken gebruikt voor raaklijn
- Na aansporing ingezien dat de constante somafstand gebruikt kon worden

Resultaten: leerling 3

Pretest:

- Geen meetkundige definities genoemd, precieze vergelijking onbekend
- **Associatie met symmetrie, brandpunten en kegelsneden**
- Gebruikgemaakt van symmetrie
- Geen meetkundige bewijstechnieken gebruikt
- Richtcirkel niet herkend

Posttest:

- Eén meetkundige definitie en de correcte vergelijking genoemd
- Koppeling formule aan ligging in assenstelsel
- Gebruikgemaakt van symmetrie
- Geen meetkundige bewijstechnieken gebruikt voor raaklijn
- Na aansporing ingezien dat de constante somafstand gebruikt kon worden

Vergelijking:

- **Vooruitgang in associaties** bij ellipsen
- **Verband tussen standaardvergelijking en figuur verbeterd**
- Bij posttest **meetkundige definitie toegepast** in analytische opgave
- **Enige verrijking** van cognitieve eenheden

Resultaten: leerling 4

Pretest:

- Geen meetkundige definities genoemd, precieze vergelijking onbekend
- Associaties met symmetrie, translaties en toppen
- Gebruikgemaakt van symmetrie
- Geen meetkundige bewijstechnieken gebruikt
- Richtcirkel niet herkend

Resultaten: leerling 4

Pretest:

- Geen meetkundige definities genoemd, precieze vergelijking onbekend
- Associaties met symmetrie, translaties en toppen
- Gebruikgemaakt van symmetrie
- Geen meetkundige bewijstechnieken gebruikt
- Richtcirkel niet herkend

Posttest:

- Beide meetkundige definities genoemd (hoewel **niet direct**)
- Gebruikgemaakt van symmetrie
- Geen meetkundige bewijstechnieken gebruikt voor raaklijn
- Na **aansporing** ingezien dat de constante somafstand gebruikt kon worden

Resultaten: leerling 4

Pretest:

- Geen meetkundige definities genoemd, precieze vergelijking onbekend
- Associaties met symmetrie, translaties en toppen
- Gebruikgemaakt van symmetrie
- Geen meetkundige bewijstechnieken gebruikt
- Richtcirkel niet herkend

Posttest:

- Beide meetkundige definities genoemd (hoewel **niet direct**)
- Gebruikgemaakt van symmetrie
- Geen meetkundige bewijstechnieken gebruikt voor raaklijn
- Na **aansporing** ingezien dat de constante somafstand gebruikt kon worden

Vergelijking:

- Bij posttest **meer associaties**, hoewel pas na aansporing
- **Weinig inzicht toegepast** bij de opgaven
- Meer kennis, maar nog **zwakverbonden cognitieve eenheden**

Conclusies

“Leidt het benadrukken van onderliggende concepten uit de synthetische meetkunde, eventueel gevisualiseerd door middel van GeoGebra, in Hoofdstuk 14 van Getal & Ruimte VWO D4 (Analytische meetkunde – Krommen) tot rijkere cognitieve eenheden?”

Conclusies

“Leidt het benadrukken van onderliggende concepten uit de synthetische meetkunde, eventueel gevisualiseerd door middel van GeoGebra, in Hoofdstuk 14 van Getal & Ruimte VWO D4 (Analytische meetkunde – Krommen) tot rijkere cognitieve eenheden?”

Soms...

- Eén leerling is weinig vooruitgegaan
- Eén leerling is aanzienlijk vooruitgegaan
- Twee leerlingen zijn enigszins vooruitgegaan

Conclusies

“Leidt het benadrukken van onderliggende concepten uit de synthetische meetkunde, eventueel gevisualiseerd door middel van GeoGebra, in Hoofdstuk 14 van Getal & Ruimte VWO D4 (Analytische meetkunde – Krommen) tot rijkere cognitieve eenheden?”

Soms...

- Eén leerling is weinig vooruitgegaan
- Eén leerling is aanzienlijk vooruitgegaan
- Twee leerlingen zijn enigszins vooruitgegaan

Oorzaken voor verminderd effect:

- Weinig zelfvertrouwen
- Te weinig langetermijnpotentiatie

Discussie

Interne validiteit (meet ik wat ik wil weten?)

- Geen **controlegroep**
- Pretest tijdens eerste les

Discussie

Interne validiteit (meet ik wat ik wil weten?)

- Geen **controlegroep**
- Pretest tijdens eerste les

Externe validiteit (zijn mijn resultaten generaliseerbaar?)

- **Klein aantal deelnemers**
- Eén school, één klas, één docent

Discussie

Interne validiteit (meet ik wat ik wil weten?)

- Geen **controlegroep**
- Pretest tijdens eerste les

Externe validiteit (zijn mijn resultaten generaliseerbaar?)

- **Klein aantal deelnemers**
- Eén school, één klas, één docent

Maar toch: indicatie dat het benadrukken van onderliggende meetkundige concepten **nut kan hebben** (en sommigen **motiveert**).

Aanbevelingen

Vragen voor de toekomst:

- Onder welke **voorwaarden** treedt de meeste verrijking op?
- Werkt deze methode ook voor **andere leerlingen**, scholen, niveaus?

Aanbevelingen

Vragen voor de toekomst:

- Onder welke **voorwaarden** treedt de meeste verrijking op?
- Werkt deze methode ook voor **andere leerlingen**, scholen, niveaus?

Aanbevelingen:

- Groter onderzoek met **controlegroep** (parallele klassen)
- Gebruik van **kwantitatieve** technieken
- **Uitproberen** van huidige lesmethode op enthousiaste leerlingen

Aanbevelingen

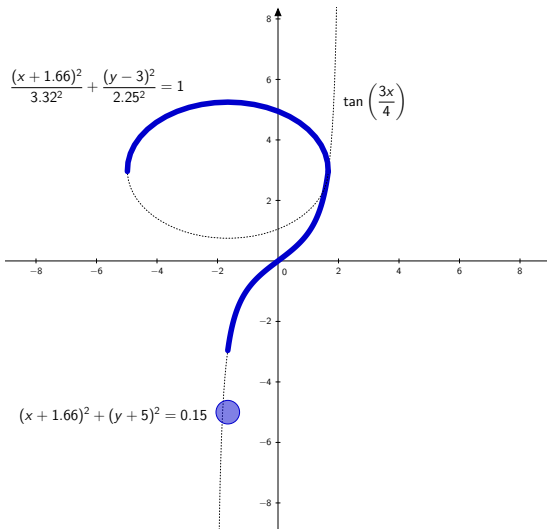
Vragen voor de toekomst:

- Onder welke **voorwaarden** treedt de meeste verrijking op?
- Werkt deze methode ook voor **andere leerlingen**, scholen, niveaus?

Aanbevelingen:

- Groter onderzoek met **controlegroep** (parallele klassen)
- Gebruik van **kwantitatieve** technieken
- **Uitproberen** van huidige lesmethode op enthousiaste leerlingen (Euclides-artikel in de maak)

Vragen



Toepassingen voor het meetkundecollege

- ① Studenten ook kennis laten maken met synergie tussen synthetische en analytische meetkunde

Toepassingen voor het meetkundecollege

- 1 Studenten ook kennis laten maken met synergie tussen synthetische en analytische meetkunde
- 2 GeoGebra-visualisaties maken of laten maken

Wat ik persoonlijk geleerd heb

- 1 Sociaal-wetenschappelijk onderzoek is nog niet zo makkelijk...

Wat ik persoonlijk geleerd heb

- 1 Sociaal-wetenschappelijk onderzoek is nog niet zo makkelijk...
- 2 Meetkunde is leuk!

Wat ik persoonlijk geleerd heb

- 1 Sociaal-wetenschappelijk onderzoek is nog niet zo makkelijk...
- 2 Meetkunde is leuk!
- 3 Rijke cognitieve eenheden komen niet vanzelf