Punten, Vectoren in de $\mathbb{R}^{\boldsymbol{n}}$

Punten:

$$\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n)\ , \quad \boldsymbol{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$$

Vectoren:

$$\boldsymbol{a} = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n\rangle\ , \quad \boldsymbol{b} = \langle b_1, b_2, \ldots, b_n\rangle$$

lengte van a :

$$|\boldsymbol{a}| = \sqrt{a_1^2 + \ldots + a_n^2}$$

afstand tussen a en b :

$$|\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + \ldots + (a_n - b_n)^2}$$

limiet a $\rightarrow$ b:

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b} \ &\Leftrightarrow\ a_i \rightarrow b_i, \quad \forall i = 1, \ldots, n \\ &\Leftrightarrow\ |\mathbf{a} - \mathbf{b}| \rightarrow 0 \end{aligned}$$

$$|\mathbf{x} - \mathbf{a}| \leq k \ \text{ of } \ (x_1 - a_1)^2 + \ldots + (x_n - a_n)^2 \leq k^2$$

bol om a, straal k

inprodukt van a en b

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ldots + a_n b_n$$

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$: **a** loodrecht op **b** ($\mathbf{a} \perp \mathbf{b}$)

Theorie:

$$\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{a} = |\boldsymbol{a}|^2, \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$$

$$\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} + \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}$$

Als φ de hoek is tussen **a** en **b** dan :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\boldsymbol{a}|\ |\boldsymbol{b}|\ \cos\varphi$$

Uitwendig product

$$\boldsymbol{a} = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle \qquad \boldsymbol{b} = \langle b_1, b_2, b_3 \rangle$$

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} = \langle a_2 b_3 - a_3 b_2 \; , \; a_3 b_1 - a_1 b_3 \; , \; a_1 b_2 - a_2 b_1 \rangle$$

$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \;\perp \boldsymbol{a}$ en $\mathbf{b}$ **"rechte hand regel"**

Theorie:

$$|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}| = |\boldsymbol{a}| \cdot |\boldsymbol{b}| \cdot \sin \varphi$$

oppervlak parallelogramm

$$|\boldsymbol{a} \cdot (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c})| =$$

volumen van "blok"

13.1, 13.2, Vector functies

Gegeven de afbeelding:

$$\begin{array}{rcl} r : [\alpha, \beta] & \to & \mathbb{R}^3 \\ t & \to & r(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle \end{array}$$

geparametriseerd kromme:

$r(t)$ heet (ruimte) kromme, t parameter

Interpretatie: $r(t)$ is plaats van 'deeltje' ten tijde t.

Def. $r(t)$ heet continu als $f(t), g(t), h(t)$ continu zijn.

Def. Afgeleide van $r(t)$:

$$\frac{dr}{dt} = r'(t) := \lim_{h \to 0} \frac{r(t+h) - r(t)}{h}$$

$r'(t)$: afgeleide van $r(t)$ in t.

Geometrisch: (mits $r'(t) \neq 0$)
$r'(t)$ is raakvector aan $r(t)$ in t:

$$T(t) := \frac{r'(t)}{|r'(t)|}$$

'genormeerd' raakvector

Berekening van $r'(t)$:

$$r'(t) = \langle f'(t), g'(t), h'(t) \rangle$$

Def. $r : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^3$

heet 'gladd' (continu diff.baar) als geldt:

$r'(t)$ is continu op $[\alpha, \beta]$ **en**
$r'(t) \neq 0$ voor alle $t \in (\alpha, \beta)$.

Rekenregels:

1. $[\mathbf{u}(t)+\mathbf{v}(t)]' = \mathbf{u}'(t)+\mathbf{v}'(t)$

3. $[f(t)\mathbf{u}(t)]' = f'(t)\mathbf{u}(t) + f(t)\mathbf{u}'(t)$

4. $[\mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}(t)]' = \mathbf{u}'(t)\cdot\mathbf{v}(t) + \mathbf{u}(t)\cdot\mathbf{v}'(t)$

6. $[\mathbf{u}(f(t))]' = f'(t)\,\mathbf{u}'(f(t))$

Integraal van $\boldsymbol{r(t) = \langle f(t), g(t), h(t)\rangle}$:

$$\int_\alpha^\beta r(t)\,dt = \int_\alpha^\beta \langle f(t), g(t), h(t)\rangle\,dt$$

$$:= \langle \int_\alpha^\beta f(t)\,dt\,,\, \int_\alpha^\beta g(t)\,dt\,,\, \int_\alpha^\beta h(t)\,dt\,\rangle$$

Formula: raaklijn “aan $\boldsymbol{r(t)}$” in $\boldsymbol{r(t_0)}$

$$\boldsymbol{\ell(t) = r(t_0) + t\,r'(t_0)}$$

13.4 Beweging in de ruimte

Interpretatie : $r(t) = \langle f(t), g(t), h(t) \rangle$

$r(t)$:	plaats van ’deeltje’ (*t* tijd)
$r'(t) = v(t)$:	snelheid van ’deeltje
$\vert r'(t) \vert$:	absolute snelheid (speed)
$r''(t) = v'(t) = a(t)$:	versnelling van ’deeltje’

Opgaven:

♡ 13.1:26, 13.2: 27, 13.4: 9

14.3, 14.4 Functies van meerdere variabelen

Def.

$$\begin{array}{rccl} f\ : & D \subset \mathbb{R}^n & \to & \mathbb{R} \\ & x = (x_1, \ldots, x_n) & \to & w = f(x_1, \ldots, x_n) \end{array}$$

D heet domain,

$B := \{w = f(x) \mid x \in D\}$ het beeld

Begrippen:

- **grafiek, niveauverzameling van f**
- **continuiteit**
- **partiele afgeleiden, differentierbaarheid**

Voorbelden partiele diff.vergelijkingen:

Laplace V: $u_{xx} + u_{yy} = 0$, $u(x, y)$

Golf V: $u_{tt} = a^2 u_{xx}$, $u(x, t)$

Diffusie V: $u_t = \alpha u_{xx}$, $u(x, t)$

raakvlak, lineaire approximatie

Def. $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, f_x, f_y continu.

$$\boldsymbol{L(x,y) = f(x_0,y_0) + f_x(x_0,y_0)(x - x_0)}$$
$$\boldsymbol{+ f_y(x_0,y_0)(y - y_0)}$$

heet raakvlak aan 'z $= f(x, y)$' in (x_0, y_0)
of in (x_0, y_0, z_0) met $z_0 = f(x_0, y_0)$

Geometrisch: $L(x, y)$ is lineare 'approximatie', die in (x_0, y_0) met $f,\ f_x,\ f_y$ 'overeenstemt'.

totaal differentiaal: Stel $z = f(x, y)$ is diff.baar.

$$\boldsymbol{df = f_x(x,y)dx + f_y(x,y)dy}$$

heet **(totaal) differentiaal**

Kettingregel. (Algemeen)

Gegeven diff.bare functies

$u = u(x_1, \ldots, x_n)$, $x_j = x_j(t_1, \ldots, t_m)$

Dan is de samengestelde functie

$u = u(t_1, \ldots, t_m) = u(x_1(t), \ldots, x_n(t))$

diff.baar met

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \cdots + \frac{\partial u}{\partial x_n} \cdot \frac{\partial x_n}{\partial t_i}$$

voor $i = 1, \ldots, m$

Impliciet differentiëren: F diff.baar

Los op $\boldsymbol{F(x,y)=0}$ als

$$\boldsymbol{F(x, y(x)) = 0} \qquad ?\ y(x)$$

Th. Als $F(a,b)=0$ en $\boldsymbol{F_y(a,b)\neq 0}$ dan bestaat er 'rond (a,b) ' de functie $y(x)$ met $y(a)=b$, $F(x,y(x))=0$ en

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{F_x}{F_y} \quad \text{of} \quad \frac{dy}{dx}(a) = -\frac{F_x(a,b)}{F_y(a,b)}$$

Los op $\boldsymbol{F(x,y,z)=0}$ als

$$\boldsymbol{F(x, y, z(x,y)) = 0} \qquad ?\ z(x,y)$$

Th. Als $F(a,b,c)=0$ en $\boldsymbol{F_z(a,b,c)\neq 0}$ dan bestaat er 'rond (a,b,c)' de functie $z(x,y)$: $z(a,b)=c$, $F(x,y,z(x,y))=0$,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{F_x}{F_z} \quad \text{of} \quad \frac{\partial z}{\partial x}(a,b) = -\frac{F_x(a,b,c)}{F_z(a,b,c)}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{F_y}{F_z} \quad \text{of} \quad \frac{\partial z}{\partial y}(a,b) = -\frac{F_y(a,b,c)}{F_z(a,b,c)}$$

14.6 gradient, richtingsafgeleide

Gegeven diff.baar $f(x), \quad x = (x_1, \ldots, x_n)$

gradient:

$$\nabla f(x) = \langle f_{x_1}(x), \ldots, f_{x_n}(x) \rangle$$

richtingsafgeleide:

$$D_u f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x + hu) - f(x)}{h}$$

als $u = \langle u_1, \ldots, u_n \rangle$ met $|u| = 1$

Regel:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{D_u f(x)} &= \boldsymbol{\nabla f(x) \cdot u} \\ &= f_{x_1}(x)u_1 + \ldots + f_{x_n}(x)u_n \end{aligned}$$

15 Theorem

De 'stijging' $D_u f(x)$ is maximaal voor

$$u = \frac{\nabla f(x)}{|\nabla f(x)|} \qquad (\text{ als } \nabla f(x) \neq 0)$$

met max-waarde $D_u f(x) = |\nabla f(x)|$

Geometrisch: Gegeven het punt $P = (x_0, y_0, z_0)$ in de niveauverz. $N := \{(x, y, z) \mid F(x, y, z) = k\}$. Dan geldt in P

$$\boldsymbol{\nabla F(P)} \perp \boldsymbol{N}$$

raakvlak aan N in $P = (x_0, y_0, z_0)$:

$$F_x(P)(x - x_0) + F_y(P)(y - y_0) + F_z(P)(z - z_0) = 0$$

normale lijn t.o.v. N in $P = (x_0, y_0, z_0)$:

$$r(t) = \langle x, y, z\rangle = \langle x_0, y_0, z_0\rangle + t \cdot \nabla F(x_0, y_0, z_0)$$

of door

$$\frac{x - x_0}{F_x(x_0, y_0, z_0)} = \frac{y - y_0}{F_y(x_0, y_0, z_0)} = \frac{z - z_0}{F_z(x_0, y_0, z_0)}$$

Opgaven:

♡ 14.5: 25,29,31 14.6: 23,32,41

Taylor approximatie:

van $z = f(x, y)$ rond (a, b)

orde 2: (kwadratische approximatie)

$$
\begin{aligned}
q(x, y) = {} & f(a, b) \\
& + f_x(a, b)(x - a) + f_y(a, b)(y - b) \\
& + \tfrac{1}{2}\Big(f_{xx}(a, b)(x-a)^2 + 2 f_{xy}(a, b)(x-a)(y-b) \\
& \qquad\qquad + f_{yy}(a, b)(y - b)^2\Big)
\end{aligned}
$$

14.7 Maxima en minima

Def. Gegeven $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$
p heet **globaal**

minimum als: $f(p) \leq f(x), \quad \forall x \in D$

maximum als: $f(p) \geq f(x), \quad \forall x \in D$

p heet **lokaal** minimum/maximum als er een “omgeving” $B_\rho(p) = \{x \in \mathbb{R}^n \mid |x - p| < \rho\}$, $(\rho > 0)$ van p bestaat met:

$$\begin{matrix} f(p) \leq f(x) \\ f(p) \geq f(x) \end{matrix} \quad \forall x \in D \cap B_\rho(p)$$

minima of maxima heeten extrema.

2 Th. (noodzakelijke conditie) Gegeven

$f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $f(x)$, $x = (x_1, .., x_n)$ diff.baar.
Als p een lokaal min/max is dan:

$$\boldsymbol{\nabla f(p) = 0} \quad \text{of} \quad \begin{matrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(p) = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(p) = 0 \end{matrix}$$

voldoende condities:

geval $\boldsymbol{f} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ \boldsymbol{f(x,y)},\ \boldsymbol{p = (a,b)}.$

Hessiaan:

$$\boldsymbol{H(x,y)} := \det \begin{pmatrix} f_{xx}(x,y) & f_{xy}(x,y) \\ f_{yx}(x,y) & f_{yy}(x,y) \end{pmatrix}$$

Stel $\boldsymbol{\nabla f(a,b) = 0}$ **en**

$H(a,b) > 0,\ f_{xx}(a,b) > 0 \Rightarrow (a,b)$ is lok. min.

$H(a,b) > 0,\ f_{xx}(a,b) < 0 \Rightarrow (a,b)$ is lok. max.

$H(a,b) < 0, \qquad \Rightarrow (a,b)$ is zadelpunt.

$H(a,b) = 0, \qquad \to$ **“weet niet”**

Globaal (absoluut) extremum

D $\subset \mathbb{R}^n$ heet **gesloten** (closed) als geldt:

$$\mathbf{x}_\nu \in D,\ \mathbf{x}_\nu \to p \quad \Rightarrow \quad p \in D$$

D $\subset \mathbb{R}^n$ heet **begrensd** (bounded) als er een $M > 0$ bestaat zodat geldt:

$$|\boldsymbol{x}| \leq \boldsymbol{M} \qquad \forall \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{D}$$

Th. Stel $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ is

- **continu op D** en
- **D is begrensd en gesloten**

Dan bestaan er een

globaal minimum $\boldsymbol{p_0} \in \boldsymbol{D}$ en een
globaal maximum $\boldsymbol{p_1} \in \boldsymbol{D}$ **van f in D**

Bepaling van globaal min/max:

1. bepaal de kritieke punten, $\nabla f(x) = 0$ “ **binnen D**”
2. bepaal extrema op “ **de rand van D**”
3. neem **min/max uit 1. en 2.**

14.8 extrema onder nevenvoorwaarden

$$P_1 : \begin{matrix}\min \\ \max\end{matrix} \; f(x) \quad \text{odn.} \quad g(x) = k$$

$x = (x_1, .., x_n),\; f(x), g(x),$ diff.baar

Th. Stel $p = (p_1, .., p_n)$ is een lokaal min/max van P_1 en $\nabla g(p) \neq 0.$ Dan is er een $\boldsymbol{\lambda} \in \mathbb{R}$ (**Lagrange multiplicator**) zo dat p, λ voldoen aan:

$$\boldsymbol{\nabla f(x) = \lambda \nabla g(x)} \quad \text{of} \quad \begin{aligned} f_{x_1}(x) &= \lambda g_{x_1}(x) \\ &\vdots \\ f_{x_n}(x) &= \lambda g_{x_n}(x) \end{aligned}$$

$$\boldsymbol{g(x) = k} \qquad\qquad g(x) = k$$

(n+1) vergelijkingen in
(n+1) onbekennden $\mathbf{x} = (x_1, .., x_n),\; \boldsymbol{\lambda}$

$$P_2 : \begin{array}{c}\min\\ \max\end{array} f(x) \quad \text{odn.} \quad g(x) = k_1$$

$$\text{en} \quad h(x) = k_2$$

$f(x), g(x), h(x)$ diff.baar

Th. Stel $p = (p_1, .., p_n)$ is een lokaal min/max van P_2 en
$\nabla g(p), \nabla h(p)$ zijn linear onafhankelijk.

Dan zijn er $\boldsymbol{\lambda}, \ \boldsymbol{\mu} \in \mathbb{R}$ (**Lagrange multiplicatoren**) zo dat p, λ, μ voldoen aan:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\nabla f(x)} &= \boldsymbol{\lambda \nabla g(x) + \mu \nabla h(x)} \\ \boldsymbol{g(x)} &= \boldsymbol{k_1} \\ \boldsymbol{h(x)} &= \boldsymbol{k_2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_{x_1}(x) &= \lambda g_{x_1}(x) + \mu h_{x_1}(x) \\ &\vdots \\ \text{of} \qquad f_{x_n}(x) &= \lambda g_{x_n}(x) + \mu h_{x_n}(x) \\ g(x) &= k_1 \\ h(x) &= k_2 \end{aligned}$$

(n+2) vergelijkingen in
(n+2) onbekennden $\mathbf{x} = (x_1, .., x_n), \ \boldsymbol{\lambda}, \ \boldsymbol{\mu}$